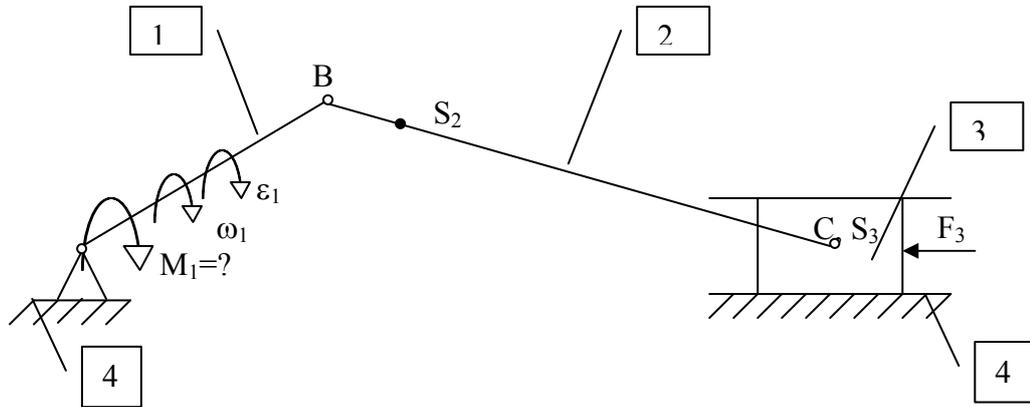


К.т.н., доц. Каганова В.В., к.т.н., доц. Каганов Ю.Т.,
д.т.н., проф. Тимофеев Г.А.

Расчет усилий в кинематических парах рычажных механизмов графо-аналитическим методом без учета трения.

Кинематическая схема кривошипно-ползунного механизма



Дано:

Определить: реакции во всех кинематических парах и момент M_1

Решение:

Считаем, что все кинематические параметры данного механизма: линейные и угловые скорости, ускорения определены ранее (см. семинар №1, Д/З №1) как по величине, так и по направлению. Данную задачу будем решать методом кинематики, используя принцип Д'Аламбера. То есть вместе с реальными силами (F_3 , G_1 , G_2 , G_3) и моментами (M_1), действующими на механизм, к механизму прикладывают расчетные силы (силы инерции Φ_{si}) и моменты пар сил инерции $M_{\phi i}$. Тогда расчетная система будет находиться в состоянии условного статического равновесия и задачу динамики можно решать методами статики.

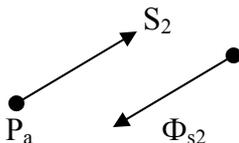
Таким образом, решение задачи можно разбить на три этапа:

1. Расчет кинематических параметров: v_i , α_i , ϵ_i , ω_i (как было уже указано – этап выполнен ранее).
2. Расчет сил инерции и моментов пар сил инерции:

$$\Phi_{si} = -m_i \alpha_i$$

$$M_{\phi i} = -E_i \cdot I_{si}$$

знак “-” указывает, что направление вектора Φ_{si} параллельно соответствующему вектору α_{si} по плану ускорений, но направлен в противоположную сторону.



А направление $M_{\phi i}$ направлено в сторону, противоположную направлению E_i .

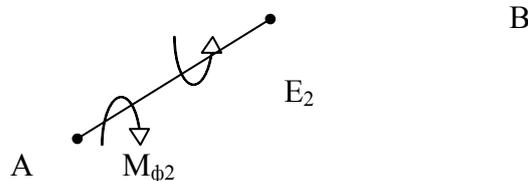


Рис. 2

3. Расчет усилий в кинематических парах.

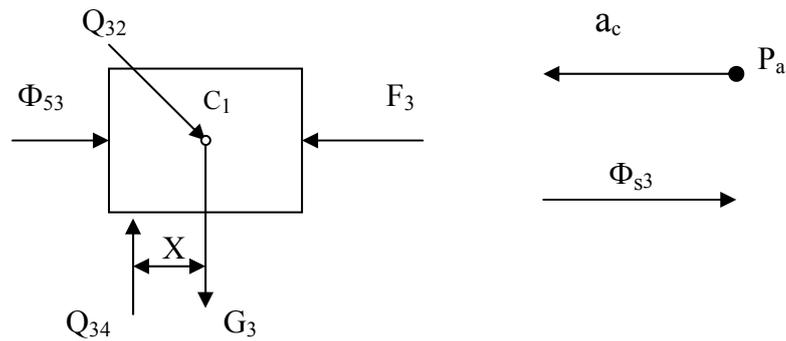


рис. 3

Задачу начинают решать с того звена, или с той структурной группы Ассура, к которым приложена известная по условию сила или крутящий момент. В данном случае известна сила F_3 , приложенная к звену 3. Вычертим отдельно звено 3 и приложим к нему все силовые факторы в соответствии с принципом Д'Аламбера. Действие звена 2 на звено 3 заменим реакцией Q_{32} , (первая цифра индекса указывает, на какое звено действует реакция, вторая - с какого звена действует эта сила), приложенной к вращательной кинематической паре С. Направление реакции Q_{32} известно. Известно только то, что она проходит через центр шарнира С, так как трение не учитывается. Элементарные силы, приложенные к шарниру С, направлены по нормали к поверхности шарнира. Результирующая всех этих сил Q_{32} проходит через центр шарнира С, но направление её пока неизвестно.

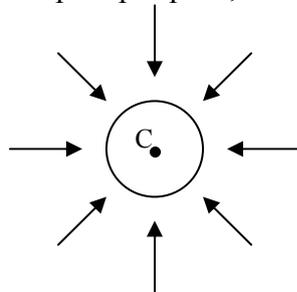


Рис. 4.1

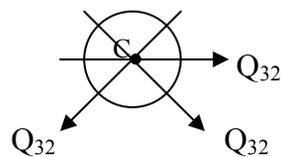


Рис. 4.2

Реакция Q_{34} направлена по нормали к звену 3 и стойке 4 (так как трение не учитывается). Однако, вверх или вниз направленно Q_{34} пока неизвестно. Условно направим её вверх. Неизвестна точка приложения Q_{34} к звену 3. Обозначим расстояние точки приложения Q_{34} от центра масс звена 3 (точка S_3)- X .

$$\sum M_{S_3}(F) = 0. \quad Q_{34} * X = 0.$$

Так как $Q_{34} \neq 0$, то, следовательно, $X = 0$ и реакция Q_{34} проходит через точку S_3 , которая совпадает на нашей схеме с кинематической парой С.

Запишем уравнение Д'Аламбера для звена №3.

$$F_3 + G_3 + \Phi_{S_3} + Q_{34} + Q_{32} = 0 \text{ (векторная сумма) } \quad (1)$$

$$= = = \quad -? \quad ??$$

Двумя чертами подчеркиваем известные по величине и направлению, одной чертой - частично известные, ?? означают, что сила неизвестна ни по величине, ни по направлению. Таким образом, так как в уравнении (1) три неизвестных величины: Q_{34} - по величине и Q_{32} - ни по величине, ни по направлению - это уравнение пока решить нельзя.

Рассмотрим отдельно звено №2. Вычертим его в масштабе μ_L , мм/м, чтобы плечи сил, приложенных к звену, можно было брать с чертежа, $h=z_h/\mu_L$, м (где z_h длина плеча в мм на чертеже).

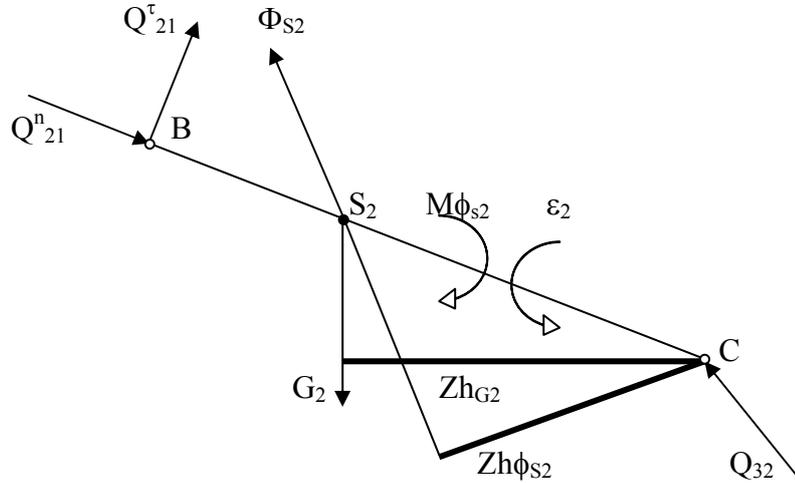


Рис. 5.

Реакция в кинематической паре А и Q неизвестна ни по величине, ни по направлению. Разложим её на тангенциальную составляющую Q_{21}^{τ} , перпендикулярную отрезку AC на чертеже и нормальную- Q_{21}^n , направленную вдоль отрезка AC.

$$\sum M_c(F)=0$$

$$- Q_{21}^{\tau} * l_{ac} + G_2 * h_{g2} - \Phi_{s2} * h_{\phi s2} - M_{\phi 2} = 0 \Rightarrow$$

$$Q_{21}^{\tau} = [G_2 * h_{g2} - \Phi_{s2} * h_{\phi s2} - M_{\phi 2}] / l_{ac}, \text{ Н.}$$

$$h_{g2} = z_{hg2} / \mu_L, \text{ м}$$

$$h_{\phi s2} = z_{\phi s2} / \mu_L, \text{ м}$$

Если Q_{21}^{τ} после подсчета будет отрицательной, то её нужно направить в противоположную от первоначального варианта сторону.

Рассмотрим совместно звенья № 2,3 (двухповодковая структурная группа Ассура). Запишем для неё уравнение Д'Аламбера:

$$F_3 + G_3 + \Phi_{s3} + G_2 + \Phi_{s2} + Q_{21}^{\tau} + Q_{21}^n + Q_{34} = 0 \quad (2)$$

$$= = = = = = = - -$$

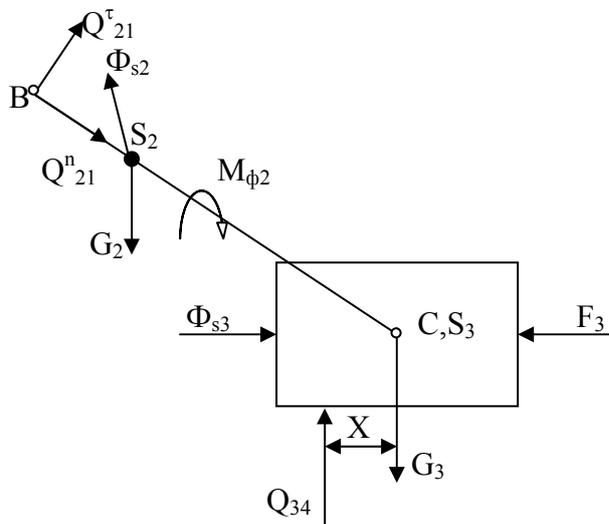


рис. 6

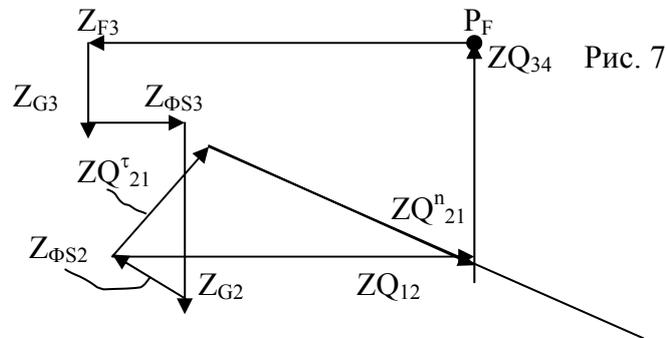
В уравнении (2) две неизвестных величины (цифровые значения Q_{21}^n и Q_{34}). Это уравнение решим, построив план сил. Для этого, выберем полюс Р плана, из которого начинается построение. Зададимся отрезком Z_{F3} , мм, который изображает силу F_3 и подсчитаем масштаб плана сил: $\mu_f = Z_{F3} / F_3$, мм / Н.

На плане сил каждая сила, входящая в уравнение (2) изображается в виде отрезка, отложенного в миллиметрах, подсчитанного по формуле:

$$\left. \begin{aligned} Z_{\Phi S3} &= \mu_f * \Phi_{S3}, \text{ мм} \\ Z_{G2} &= \mu_f * G_2, \text{ мм} \\ Z_{\Phi S2} &= \mu_f * \Phi_{S2}, \text{ мм} \\ Z_{Q_{21}^T} &= \mu_f * Q_{21}^T, \text{ мм} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

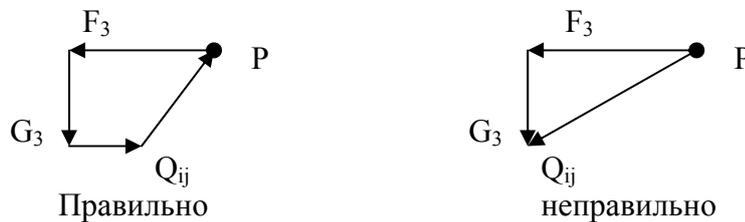
Каждая сила на плане сил изображается параллельно своему истинному направлению, а длина подсчитывается по формуле $Z_{Q_i} = \mu_f * Q_i$, мм.

μ_f , мм/Н.



Подсчитав величины отрезков, длин соответствующих векторов, из полюса плана сил (точка Р_ф- выбирается в произвольном месте чертежа) последовательно откладывают Z_{fi} , в соответствии с уравнением (2). Направления векторов на плане сил проводят параллельно направлению соответствующих векторов, изображенных на рис. 6.

Так как сумма векторов, входящих в уравнение (2) равна нулю, то на плане сил ни один вектор не должен быть направлен навстречу другому.



Соединив начало вектора $Z_{Q_{12}^T}$ с концом вектора $Z_{Q_{12}^n}$ на плане сил, получим длину вектора $Z_{Q_{12}}$.

Величина $Q_{12} = Z_{Q_{12}} / \mu_f$, н.

Замерив на плане сил длину вектора Q_{34} - $Z_{Q_{34}}$ в мм, определяют его величину $Q_{34} = Z_{Q_{34}} / \mu_f$, н.

Определив величину и направление вектора Q_{34} , вернемся к уравнению (1). Теперь в этом уравнении неизвестной величиной является вектор Q_{32} , которую можно определить по величине и направлению, построив по уравнению (1) план сил.

Пусть масштаб построению плана сил будет $\mu_f = Z_{F3} / F_3$, мм/Н (если Z_{F3} взять прежним, то μ_f не изменится, если Z_{F3} взять другим, то μ_f для построения второго плана сил изменится).

Если выбран масштаб μ_f отличный от предыдущего масштаба μ_f первого плана сил, то необходимо подсчитать длины отрезков, изображающих соответствующие вектора, по формуле $Z_{Fi} = \mu_f * F_i$, мм.

По уравнению (1) строят план сил. Начинают построение из полюса P_F .

μ_f , мм/Н

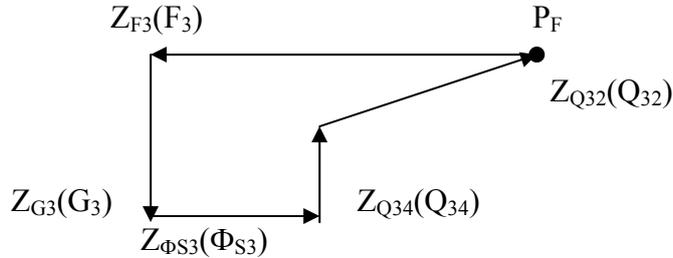


Рис. 8.

Замыкающим вектором на плане сил будет Q_{32} . Длина его Z_{Q32} определяется из плана сил, а величина $Q_{32} = Z_{Q32} / \mu_f$, Н.

Для определения реакции в шарнире «С» было рассмотреть условие условного статического равновесия звена 2 (рис. 7) и построить план сил по уравнению (4).

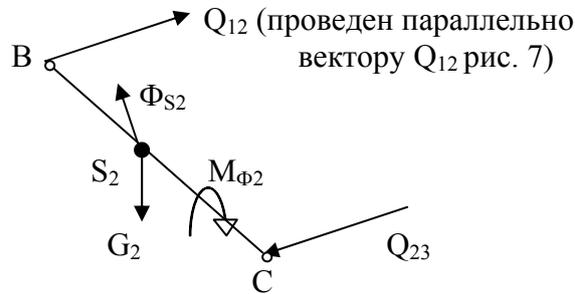
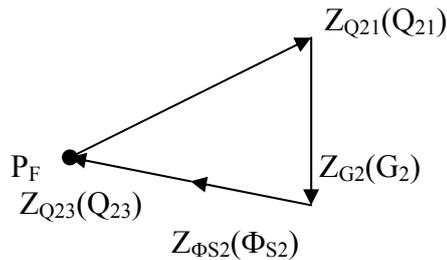


Рис. 9

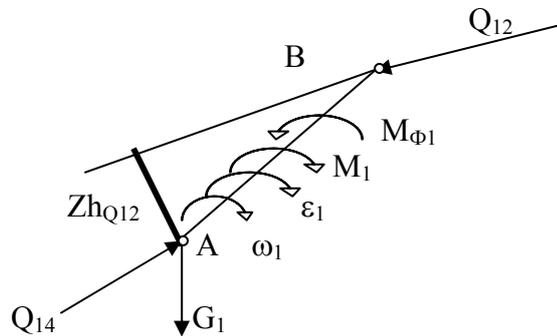
$$Q_{12} + G_2 + \Phi_{S2} + Q_{23} = 0 \quad (4)$$

$$= \quad = \quad = \quad ??$$

μ_f , мм/Н



Определив реакции Q_{23} и Q_{12} , переходим к звену 1. Изобразим его в масштабе μ_L , мм/Н.



Q_{12} проводят параллельно вектору Q_{21} плана сил, но в противоположную сторону так как $Q_{12} = -Q_{21}$.

На линию действия силы Q_{12} опустим перпендикуляр и определим плечо силы: $h_{Q12} = Z_{hQ12}$, мм с чертежа / μ_L , м.

$$\sum M_A(F) = 0.$$

$$Q_{12} * h_{Q12} + M_{\phi 1} - M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = Q_{12} * h_{Q12} + M_{\phi 1}, \text{ Н} * \text{ м}.$$

Для определения реакции Q_{14} запишем уравнение Д'Аламбера для звена 1.

$$Q_{12} + G_1 + Q_{14} = 0 \quad (5)$$

$$= \quad = \quad ??$$

В уравнении (5) неизвестна величина Q_{14} ни по величине, ни по направлению. Решим уравнение (5), построив план сил. Масштаб μ_F этого плана может быть тем же, что и масштаб μ_F предыдущих планов, а может быть иным $\mu_F = Z_{Q12} / Q_{12}$, мм/Н.

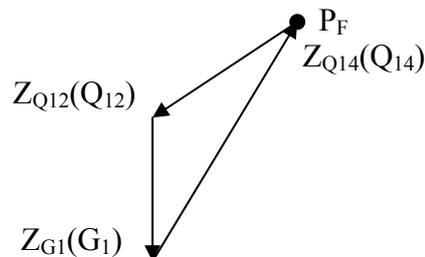
Если μ_F иной, то подсчитывают длины отрезков, изображающих на плане соответствующие вектора.

$$Z_{Q12} = \mu_F * Q_{12}, \text{ мм}$$

$$Z_{G1} = \mu_F * G_1, \text{ мм}.$$

План сил строят из полюса P_F , проводя вектора параллельно их направлениям, изображенным на рис 10.

μ_F , мм / Н



Вектор Q_{14} является замыкающим. Длина его Z_{Q14} определяется путем замера на плане сил. Величина $Q_{14} = Z_{Q14} / \mu_F$, мм / Н.

Данная задача может быть поставлена по другому: момент M , известен, а силу F_3 , приложенную к звену 3 необходимо определить.

В этом случае вначале необходимо рассмотреть отдельно звено 1.

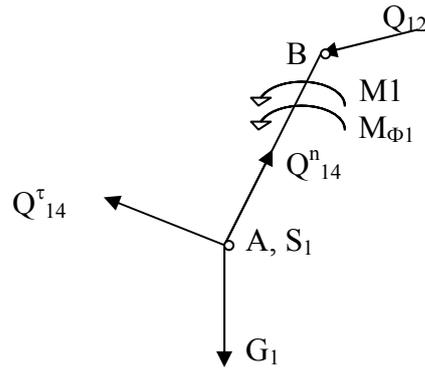


Рис. 11

Реакция Q_{12} неизвестна ни по величине, ни по направлению (проходит через центр шарнира В). Реакция Q_{14} также проходит через центр шарнира, но ее истинное направление пока неизвестно. Разложим ее на Q_{14}^{τ} перпендикулярно отрезку АВ на схеме механизма и Q_{14}^n , вдоль отрезка АВ, изображающего звено 1.

$$\sum M_B(F) = 0$$

$$- Q_{14}^{\tau} * l_{ab} + M_1 + M_{\phi 1} = 0 \Rightarrow Q_{14}^{\tau} = (M_1 + M_{\phi 1}) / l_{ab}, \text{ Н.}$$

Затем рассматривают звено 1 и 2 совместно

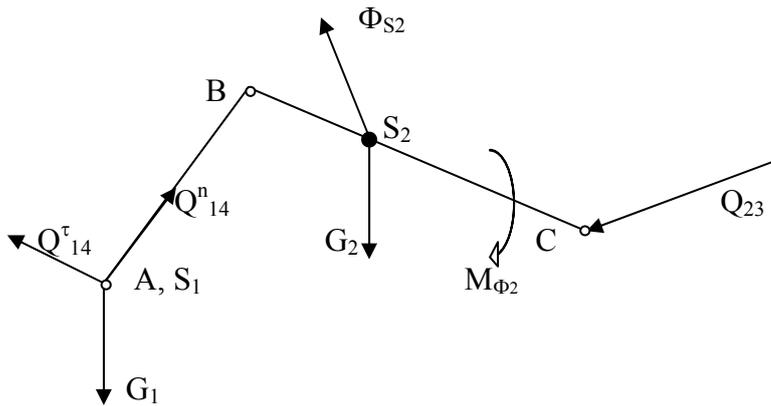


Рис. 12

И записывают уравнение Д'Аламбера.

$$Q_{14}^{\tau} + G_1 + \Phi_{S2} + G_2 + Q_{14}^n + Q_{23} = 0 \quad (6)$$

$$= \quad = \quad = \quad = \quad -? \quad ??$$

В уравнении (6) три неизвестных величины и решить его пока нельзя. Необходимо хотя бы частично определить Q_{23} и тогда уравнение (6) можно будет решить. В этой связи рассмотрим отдельно звено 2. Реакцию Q_{23} разложим на составляющие Q_{23}^{τ} , перпендикулярную линии АВ звена 2 на схеме механизма, и Q_{23}^n , направленную вдоль линии АВ того же звена 2.

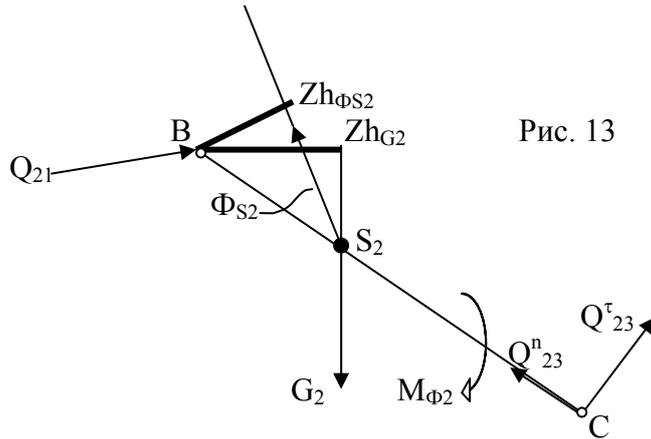


Рис. 13

$$\sum M_B(F) = 0$$

$$Q_{23}^{\tau} * l_{ab} - M_{\phi 2} + \Phi_{S2} * h_{\phi S2} - G_2 * h_{G2} = 0 \quad (7) \Rightarrow$$

$$Q_{23}^{\tau} = (M_{\phi 2} - \Phi_{S2} * h_{\phi S2} + G_2 * h_{G2}) / l_{ab}, \text{ Н, где } h_{\phi S2} = Z_{h\phi S2} / \mu_L, \text{ м;}$$

$$h_{G2} = Z_{hG2} * \mu_L, \text{ м.}$$

Определив Q_{23}^{τ} , перепишем уравнение (6) в виде

$$Q_{14}^{\tau} + G_1 + \Phi_{S2} + G_2 + Q_{23}^{\tau} + Q_{14}^n + Q_{23}^n = 0 \quad (8)$$

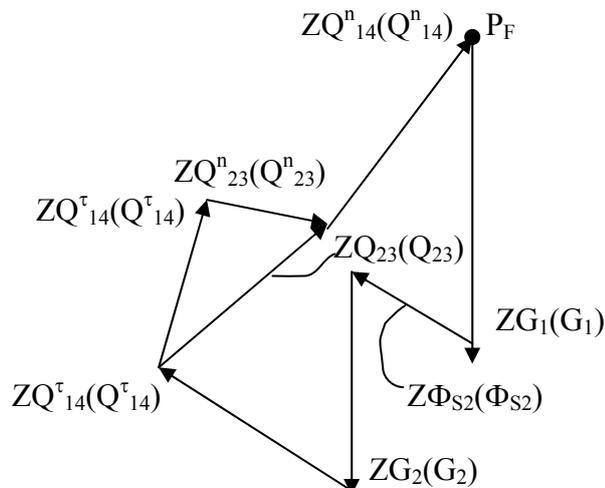
$$= \quad = \quad = \quad = \quad = \quad -? \quad -?$$

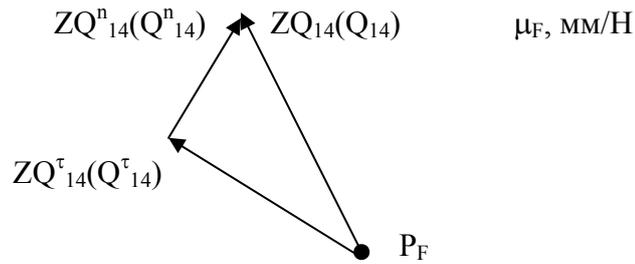
В уравнении (8) теперь две частично неизвестные величины Q_{14}^n и Q_{23}^n . (они неизвестны по величине, но известны по направлению) и это уравнение решается путем построения плана сил. Задавшись величиной отрезка Z_{G1} , мм определяют масштаб плана $\mu_F = Z_{G1} / G_1$, мм/Н. Тогда на плане отрезок в мм каждой силовой величины равен

$$Z_{Fi} = \mu_F * F_i, \text{ мм.}$$

По уравнению (7) строят план сил из полюса P_F в масштабе μ_F , мм/Н, определенному выше.

μ_F , мм/Н





Замерив отрезки ZQ_{23} и ZQ_{14} на планах сил, определяем величину соответствующих реакций:

$$Q_{23} = ZQ_{23} / \mu_F, \text{ Н}$$

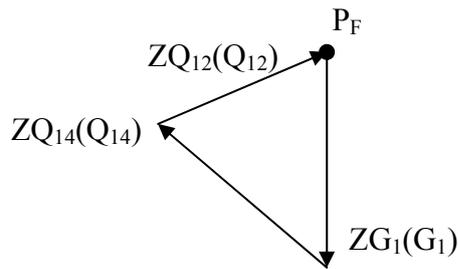
$$Q_{14} = ZQ_{14} / \mu_F, \text{ Н.}$$

Вернемся к рисунку 11 – звено 1 и запишем для него уравнение Д’Аламбера:

$$G_1 + Q_{14} + Q_{12} = 0 \quad (8).$$

$$= \quad = \quad ??$$

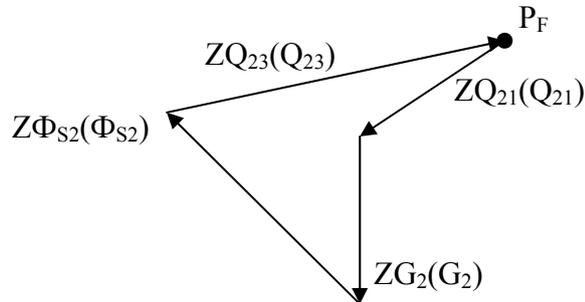
Так как в уравнении (8) только реакция Q_{12} неизвестна по величине и по направлению, строим план сил. Масштаб плана μ_F можно оставить прежним, можно выбрать другим.



Замерив на плане сил длину замыкающего отрезка ZQ_{12} , определим величину реакции $Q_{12} = ZQ_{12} / \mu_F, \text{ Н.}$ $Q_{12} = - Q_{21}$

Рассмотрев отдельно звено 2 (рис. 13) и записав для него уравнение Д’Аламбера: $Q_{21} + G_2 + \Phi_{S2} + Q_{23} = 0 \quad (9)$, построим по этому уравнению план сил и определим из него длину отрезка ZQ_{23} .

$\mu_F, \text{ мм / Н}$

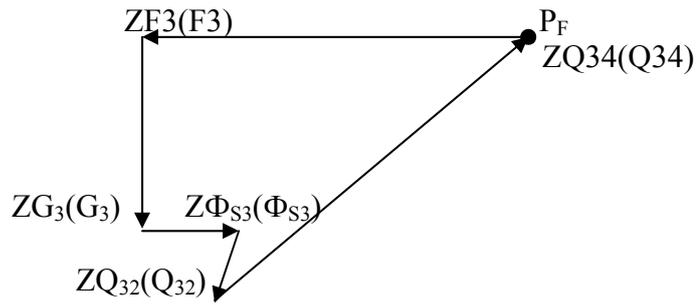


$$Q_{23} = ZQ_{23} / \mu_F, \text{ Н.} \quad Q_{23} = - Q_{32}$$

Затем рассмотрим звено 3 (Рис. 3), для которого записывается уравнение Д’Аламбера: $F_3 + G_3 + \Phi_{S2} + Q_{32} + Q_{34} = 0 \quad (10)$

$$= \quad = \quad = \quad = \quad ??$$

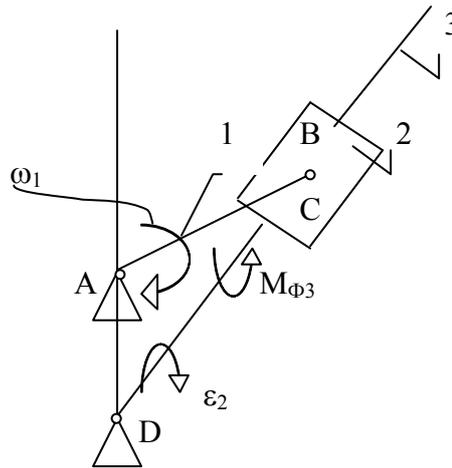
По уравнению (10) строят план сил в масштабе μ_F , мм/Н.



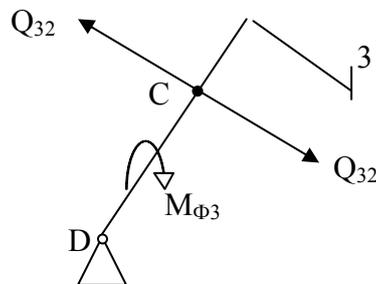
Замерив на плане сил длину отрезка ZQ_{34} , определяем

$$Q_{34} = ZQ_{34} \cdot \mu_F; \text{ Н.}$$

Следует иметь ввиду, что если рассматривают кулисный механизм рис. 14, то контакт звеньев 2 (втулка кулисы) и 3 (кулиса) осуществляется по поверхности (нижняя кинематическая пара C), при этом так как звено 2 движется вдоль звена 3, то эта кинематическая пара C – поступательная.



Следовательно, без учета трения реакция $Q_{23} = - Q_{32}$ направлена по нормали к звеньям 2 и 3 (пока неизвестна величина).



μ_L , мм / Н

Рис. 15

Истинное направление Q_{23} и ее величину определяют из уравнения:

$$\Sigma M_D(F) = 0$$

$$Q_{32} \cdot l_{DC} = M_{\Phi 3} \Rightarrow Q_{32} = M_{\Phi 3} / l_{DC}, \text{ Н, где}$$

$$l_{DC} = DC / \mu_L;$$

$$M_{\Phi 3} = \epsilon_3 \cdot \gamma_3, \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

