**В.В. Каганова, Ю.Т. Каганов, Г.А. Тимофеев**

# КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Прежде всего введем понятие масштаба в курсе Теория механизмов. ***Масштабом называется графическое изображение единицы действительной физической величины.*** Например, имеем график, приведенный на рис. 1.

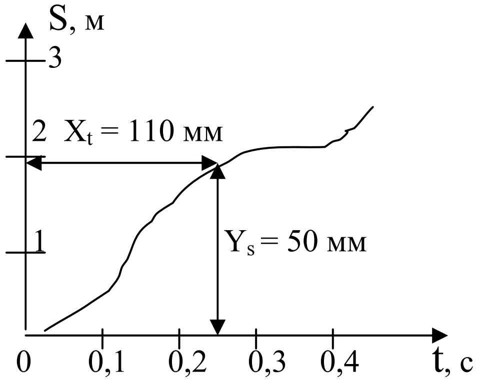


Рис.1. Понятие масштаба.

По определению $\mu$ = отрезок чертежа / действительная величина. Масштаб графика по оси ординат графика рис.1 $\mu_S = y_S / S$ = 50 мм / 2 м = 25 мм / м. Масштаб графика по оси абсцисс $\mu_t = x_t / t$ = 110 мм / 0, 22 с = 50 мм / с.

Натуральный масштаб 1: 1 в нашем курсе представляют как $\mu_l$ = 1000 мм / м;

Увеличенное изображение , например, в два раза $\mu_l$ = 2000 мм/ м;

Уменьшенное изображение, например в два раза $\mu_l$ = 500 мм / м.

Изобразим в масштабе $\mu_l$ = □$_s$ мм/м кинематическую схему кривошипно – ползунного механизма, шатун которого представляет треугольник с вершинами ВСМ. ( кинематическая схема в отличие от структурной вычерчивается в масштабе $\mu_l = AB/l_{AB}$) рис.2

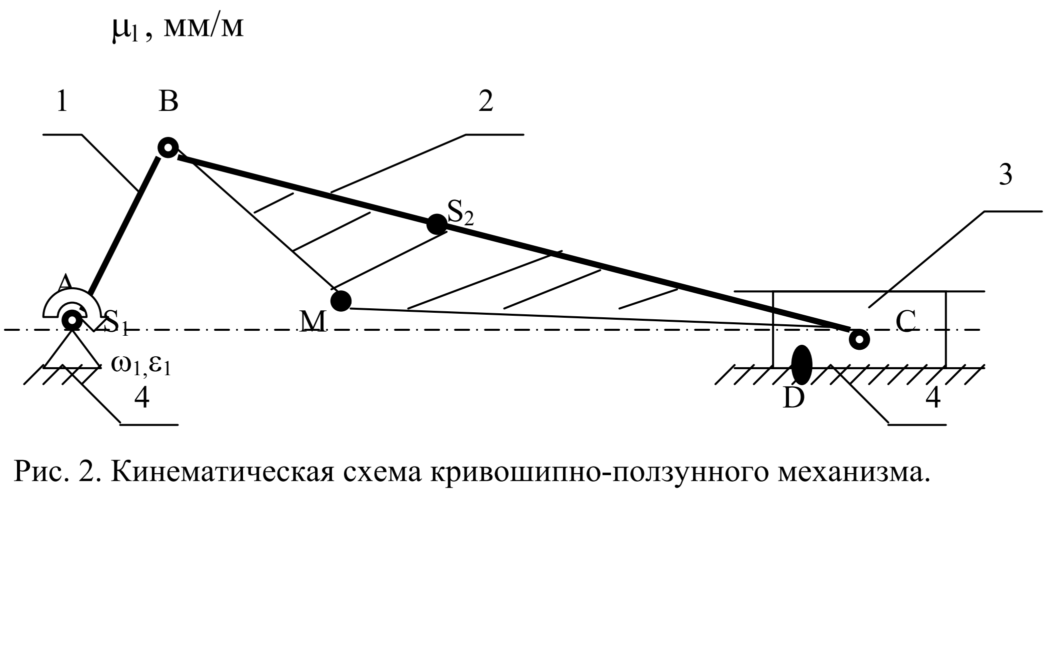


Рис. 2. Кинематическая схема кривошипно-ползунного механизма.

**ДАНО** : угловая скорость кривошипа $\omega_1$ рад / с, угловое ускорение кривошипа $\varepsilon_1$ рад / с , длины звеньев: $l_1 = l_{AB}$ , $l_2 = l_{BC}$ , $l_{BS2}$ , $l_{S2C}$ , $l_{BM}$ , $l_{MC}$
**Определить** : линейные скорости и линейные ускорения всех подвижных кинематических пар механизма , центров масс звеньев и точки М, а также угловые скорости и угловые ускорения всех подвижных звеньев механизма.

**Р Е Ш Е Н И Е**

Прежде, чем начать решение задачи, необходимо рассмотреть схему механизма и представить себе, какое движение осуществляет каждое из подвижных звеньев механизма. Начинают со звеньев, которые непосредственно взаимодействуют со стойкой ( звено 4 на рис.2).

Кривошип ( звено 1) связан со стойкой 4 вращательной кинематической парой А, которая дает возможность звену 1 совершать полный оборот вокруг оси А. Следовательно, точка В, расположенная на расстоянии $l_{AB}$ от оси А движется по окружности радиуса $l_{AB}$ . Линейная скорость этой точки $V_B$ направлена по угловой скорости $\omega_1$ касательно к траектории точки В, то есть перпендикулярно радиусу АВ и определяется как

$$\mathbf{V_B} = \omega_1 \times l_{AB}$$

Звено 3 ( поршень или ползун) движется вдоль стойки 4, то есть совершает возвратно – поступательное движение вправо или влево. Следовательно, траектория любой точки звена 3 представляет собой прямую линию.
Звено 2 – (шатун) непосредственно со стойкой не взаимодействует и совершает плоско – параллельной движение. Поэтому траектория любой точки звена 2 представляет собой сложную ( шатунную) кривую, а для определения кинематических параметров любой точки шатуна составляются уравнения плоско- параллельного движения.
Договоримся, что уравнения плоско – параллельного движения будем записывать так, чтобы в левой части уравнения находился определяемый параметр, а первым членом правой части был бы известный параметр. Так для определения скорости точки С уравнение плоско – параллельного движения записывается как:

$$V_C = V_B + V_{C\overline{B}}$$

*Договоримся, что и в дальнейшем в левой части подобного уравнения записывается частично известный параметр; первым членом правой части уравнения записывается полностью известная величина, а вторым членом правой части является частично известный параметр.*
Подчеркнем снизу символы формулы двумя черточками, если скорость известна полностью как по величине, так и по направлению ( скорость точки В определена выше и по величине, и по направлению и поэтому подчеркиваем ее двумя черточками). Одной черточкой снизу подчеркивается символ, который известен либо по направлению, либо по величине ( Скорость точки С известна только по направлению. Скорость точки С направлена вдоль линии АС так как звено 3, которому принадлежит точка С движется поступательно вдоль линии АС).
В записанном уравнении две неизвестные величины ( неизвестны численные значения скорости точки С и относительной скорости $V_{CB}$ ), следовательно, данное уравнение можно решить графическим способом. Для этого зададимся

отрезком $p_{Vb}$ произвольной длины направленного перпендикулярно зафиксированному мгновенному положению кривошипа 1, (отрезок AB на схеме) изображенного на рис.2 в сторону угловой скорости звена 1 $\omega_1$. Другими словами, отрезок $p_{Vb}$ изображает скорость точки B в некотором масштабе $\mu_V =$ отрезок $p_{Vb}$ / скорость точки B.

Точка $p_V$ называется полюс плана скоростей. Она выбирается в произвольном месте чертежа, на котором строится план ( рис.3).

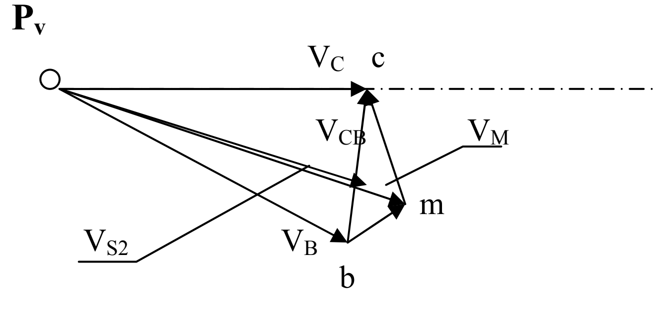


Рис.3. План скоростей.

Итак, из полюса проводится отрезок $p_{Vb}$ перепендикулярно отрезку AB схемы механизма рис. 2. На конце отрезка $p_{Vb}$ отмечается буква b. В соответствии с уравнением плоско – параллельного движения через точку b проводится направление относительной скорости $V_{CB}$ перпендикулярное к отрезку BC ( перепендикулярное к положению шатуна в данный момент времени) схемы механизма рис.2. Для того, чтобы замкнуть план скоростей , из полюса $p_V$ проводится линия параллельная направлению отрезка AC схемы механизма рис.2 ( скорость точки C направлена вдоль AC, как было отмечено выше) до пересечения с ранее проведенным на плане отрезком, изображающим относительную скорость $V_{CB}$ . На пересечении указанных отрезков ставится буква «с».

Таким образом, отрезок "bc" изображает на плане скоростей линейную относительную скорость $V_{CB}$ , отрезок "$p_V$c" - линейную скорость точки C звена 3. Чтобы подсчитать численные значения каждой из скоростей, необходимо использовать масштаб построения плана скоростей.

Скорость $V_C = \dfrac{p_v c}{\mu_v}$ , м / с;

Относительная скорость $V_{CB} = \dfrac{cb}{\mu_V}$ , м / с.

Определим скорость центра масс звена 2 $V_{S2}$. Для этой цели можно также записать уравнение плоско – параллельного движения :

$$V_{S2} = V_B + V_{S2B}$$

По данному уравнению можно построить план скоростей так как это было уже показано выше. Однако , гораздо проще для определения скорости центра масс звена 2 использовать правило распределения относительных скоростей для точек, расположенных на звене 2 :

$$\frac{V_{S2B}}{V_{CB}} = \frac{l_{S2B}}{l_{CB}} = \frac{bS_2}{cb} \Rightarrow bS_2 = cb \times \frac{l_{S2B}}{l_{CB}}, \text{ мм.}$$

Получив величину отрезка $bS_2$ в миллиметрах, его величину откладывают на плане скоростей на отрезке "bc" - от точки "b" к точке "c". Полученную точку $S_2$ соединяют с полюсом плана $p_{Vb}$ и находят направление скорости центра масс звена 2. Для определения численного значения абсолютной скорости центра масс шатуна необходимо использовать понятие масштаб построения:

$$V_{S2} = \frac{p_V s_2}{\mu_V}, \text{ м / с.}$$

Для определения линейной скорости точки, расположенной вне звена 2, например, точка М, можно записать два уравнения плоско – параллельного движения :

$$V_M = V_B + V_{MB}$$

$$V_M = V_C + V_{MC}\,.$$

Используя эти два уравнения , на плане скоростей из точки b проводят линию ( направление относительной скорости $V_{MB}$), перпендикулярно положению в данный момент времени стороны MB звена 2 механизма рис.2, а из точки c плана скоростей проводят линию ( направление относительной скорости $V_{MC}$ )перпендикулярно стороне MC звена 2 механизма рис. 2. На пересечении указанных линий получают точку m , соединив которую с полюсом плана скоростей $p_V$ , получают направление абсолютной скорости точки M. Для определения величины этой скорости необходимо замерить линейкой отрезок $p_V m$ и учесть масштаб плана скоростей:

$$V_M = \frac{p_v m}{\mu_v}, \text{ м / с}$$

Можно определить линейную скорость точки М , расположенную вне шатуна ( звена 2) другим способом , используя **правило подобия** *соответствующих треугольников на схеме механизма и на плане скоростей:* Δ *BMC механизма соответственно подобен* Δ *bmc плана скоростей.* Соответственно подобен означает, что **направление обхода букв по вершинам указанных треугольников** должно **быть одинаковым.** Так, если обход вершин треугольника BMC механизма осуществлять против часовой стрелки, то и обход букв вершин треугольника bmc плана скоростей должен быть осуществлен также против часовой стрелки. Таким образом, можно определить на плане скоростей положение точки m относительно отрезка "bc" ( справа или слева от этого отрезка находится точка m ). Важно иметь ввиду только одно: **так как точка M на механизме находится вне звена 2, то и на плане скоростей точка m будет расположена вне отрезка "bc".**

Для точного определения местоположения точки m на плане скоростей необходимо составить две пропорции (для определения длины отрезков "bm" и "cm", рис. 3.):

1. Увяжем скорость точки M со скоростью точки B:

$$\frac{V_{MB}}{V_{CB}} = \frac{L_{MB}}{L_{CB}} = \frac{mb}{cb} \Rightarrow \text{mb} = \text{cb} \times \frac{l_{MB}}{l_{CB}}$$ мм. Данный отрезок на плане скоростей изображает в масштабе плана $\mu_V$ относительную скорость $V_{MB}$

2. Увяжем скорость точки М со скоростью точки С :

$$\frac{V_{MC}}{V_{CB}} = \frac{l_{MC}}{l_{CB}} = \frac{mc}{cb} \Rightarrow \text{mc} = \text{cb} \times \frac{l_{MC}}{l_{CB}}$$ мм. Данный отрезок на плане скоростей изображает в масштабе $\mu_V$ относительную скорость $V_{MC.}$

3. **Используя правило обхода букв треугольников ВМС и bmc** и зная величины отрезков mb n mc, сделаем циркулем засечки радиусом mb из точки b плана скоростей и радиусом mc из точки c этого же плана. На пересечении дуг ставится точка m. ( в данном случае точка m расположена справа от отрезка bc на плане скоростей).

Полюс плана скоростей $p_V$ соединяется отрезком $p_V m$ с точкой m. Полученный отрезок изображает на плане скоростей в масштабе плана $\mu_V$ абсолютную скорость точки М, численное значение которой определяется как:

$$V_M = \frac{p_V m}{\mu_V} \text{ , м / с.}$$

Для определения численного значения угловой скорости звена 2 запишем уравнение:

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{CB}} \text{ , рад / с.}$$

Для определения направления угловой скорости $\omega_2$ на плане скоростей находят отрезок bc и его направление. Относительная скорость точки всегда направлена по угловой скорости звена, на котором эта точка расположена. Следовательно, в данном случае угловая скорость звена 2 направлена против часовой стрелки. ( По- другому направление $\omega_2$ определяется так: вектор bc с плана скоростей мысленно располагают в точке С механизма и поворачивают вокруг точки В, так как точка В механизма в относительном движении звена 2 является мгновенным центром скоростей).

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УСКОРЕНИЙ .

Принцип определения линейных ускорений кинематических пар и точек, расположенных на звеньях механизма, аналогичен выше приведенному принципу определения линейных скоростей. Разница лишь в том, что линейное ускорение в отличие от линейной скорости имеет две составляющие: нормальную и тангенциальную. Таким образом, для определения линейного ускорения точки В запишем формулу:

$$\overline{a_B} = a_B{}^{n} + a^{\tau}{}_{B} \, ,$$

Численное значение нормального ускорения определяют по формуле $a_B{}^n = \omega_1{}^2 \times l_{AB}$, а его направление – по радиусу вращения звена 1 то есть по звену АВ механизма от точки В к точке А ( ось вращения).

Численное значение тангенциального ускорения точки В определяется по формуле :

$$a_B{}^{\tau} = \varepsilon_1 \times l_{AB} \, .$$

Направлено тангенциальное ускорение по угловому , то есть в ту же сторону, что и угловое ускорение.
Для определения ускорения точки С звена 3 запишем уравнение плоско-параллельного движения ( так как точка С принадлежит также и звену 2, совершающему плоско – параллельное движение)

$$a_C{}^{\tau} = a_B + a_{CB}{}^{n} + a_{CB}{}^{\tau}\,.\ (*)$$

------- ------- -------- ---------
------- ------- -------- ⊥

$a_C{}^{\tau}$ подчеркнуто снизу одной черточкой так как величина этого ускорения неизвестна, а известно только его направление ( направлено вдоль линии АС , по которой перемещается звено 3).
$a_B$ полностью определено выше.
По формуле $a_{CB}{}^{n} = \omega_2 \times l_{CB}$ - определяется численное значение нормального ускорения точки С вокруг точки В. Направлено оно по радиусу вращения, чем является звено 2 ( отрезок СВ на схеме механизма) от точки С к точке В. Так как данное ускорение определено и по величине, и по направлению, то снизу оно в формуле подчеркивается двумя черточками.
Тангенциальное ускорение точки С неизвестно по величине так как пока мы не определили величину углового ускорения звена 2, но известно по направлению: перпендикулярно звену 2 в рассматриваемом его положении. Следовательно, снизу $a^{\tau}{}_{CB}$ подчеркивается одной черточкой, как частично известная величина.
Таким образом, в формуле (*) две неизвестные: численные значения величин $a^{\tau}{}_{C}$ и $a^{\tau}{}_{CB}$. В этом случае уравнение (*) решается графическим способом путем построения плана ускорений. Для определения масштаба построений на плане ускорений рис.4 **задаются отрезком** $p_aZ_a{}^{n}{}_{B}$ **произвольной длины**, который изображает нормальное ускорение точки В. Тогда $\mu_a = p_a\ Z_a{}^{n}{}_{B} /\ a^{n}{}_{B}$; мм/м*с$^{-2}$.
В произвольном месте чертежа выбирается положение полюса $p_a$ плана ускорений. Для изображенного положения механизма ( мгновенная фотография положения механизма) из полюса $p_a$ плана ускорений параллельно отрезку АВ звена 1 механизма в направлении от точки В к точке А проводится отрезок $p_a$ $Z_a{}^{n}{}_{B}$ нормального ускорения точки В . На конце указанного отрезка поставим точку b$^{*}$. От точки b$^{*}$ перпендикулярно вектору $p_a$ $Z_a{}^{n}{}_{B}$ в сторону направления углового ускорения звена 1 $\varepsilon_1$ проводится направление тангенциального ускорения точки В – отрезок конечной длины $Z_a{}^{\tau}{}_{B}$. Длина отрезка $Z_a{}^{\tau}{}_{B}$ определяется через масштаб плана ускорений:

$$Z_a{}^{\tau}{}_{B} = \mu_a \times a^{\tau}{}_{B}\text{, мм.}$$

На конце отложенного отрезка поставим точку b$^{**}$. Соединив точку b$^{**}$ с полюсом плана ускорений, получим отрезок $p_a$ b$^{**}$, который в масштабе $\mu_a$ изображает полное ускорение точки В звена 1 механизма. Численное значение этого ускорения получим через масштаб $\mu_a$:

$$a_B = p_a\, b^{**} / \mu_a\text{, м / с}^2.$$

Для окончательного решения уравнения (*) из точки b** параллельно звену 2 ( отрезку CB звена 2) от C к B проводится отрезок $Z_{a}{}^{n}{}_{CB}$ , изображающий в масштабе $\mu_a$ нормальное ускорение $a^{n}{}_{CB}$ . Его длина равна

$$Z_{a}{}^{n}{}_{CB} = \mu_a \times a^{n}{}_{CB} \text{ , мм.}$$

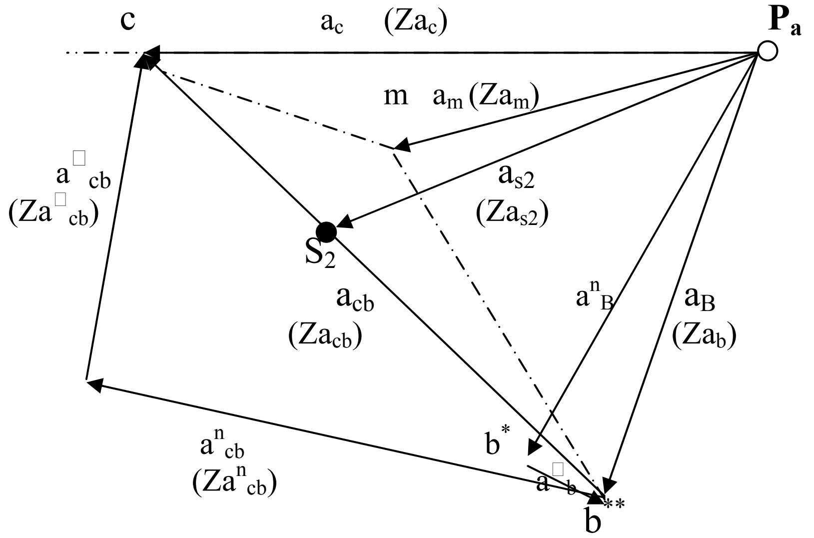


Рис.4. План ускорений.

Через его конец точку c* проводится направление тангенциального ускорения звена 2 $a^{\tau}{}_{CB}$ - перпендикуляр к отрезку CB на схеме механизма в рассматриваемом положении звена 2 . Для замыкания плана ускорений в соответствии с уравнением (*) из полюса плана $p_a$ проводят направление тангенциального ускорения точки С, которое является полным ускорением, так как нормальное ускорение точки С равно нулю.( звено 3 движется поступательно вправо, влево ; радиус кривизны траектории точки С бесконечно большой ). В пересечении отрезков ставят точку c и расставляют стрелки векторов в соответствии с уравнением (*). Таким образом, отрезок $p_a c$ на плане ускорений изображает на плане ускорений полное ускорение точки С звена 3 механизма: направлено влево, а численное значение определяется через масштаб построения плана ускорений :

$$a_C = p_a c \,/\, \mu_a \text{ , м / с}^2.$$

Для определения направления полного ускорения $a_{CB}$ соединяют точки b** и c. Стрелка вектора направлена к точке c в соответствии с уравнением (*). Для определения численного значения полного ускорения $a_{CB}$ используем масштаб построения плана ускорений:

$$a_{CB} = cb^{**} / \mu_a \text{ , м/ с.}$$

Для определения относительного ускорения центра масс $S_2$ звена 2 составим пропорцию:

$$\frac{a_{S2B}}{a_{S2C}} = \frac{l_{S2B}}{l_{S2C}} = \frac{S_2 b^{**}}{S_2 c} \quad .$$

Отсюда получаем:

$$S_2 b^{**} = S_2 c \times \frac{l_{S2B}}{l_{S2C}} \text{ , мм.}$$

Отложив от точки b** на отрезке b**c плана ускорений отрезок $S_2b$, получим на нем положение точки $S_2$. Далее точку $S_2$ соединяют с полюсом плана ускорений $p_a$ и получают направление вектора ускорения центра масс звена 2. Для определения численного значения величины линейного ускорения центра масс звена 2 в рассмотрение вводят понятие масштаба построения плана ускорений:

$$V_{S2} = \frac{p_a S_2}{\mu_a}, \text{ м / с.}$$

Полное ускорение точки М, расположенной вне звена 2, определяют аналогично тому как была определена линейная скорость этой точки, то есть , используя правило соответственного подобия треугольников ВСМ механизма и $b^*cm$ плана ускорений. Направление обхода букв в обоих подобных треугольниках должно быть одинаковым. Отрезок b*m плана ускорений находят из пропорции:

$$\frac{a_{BM}}{a_{CB}} = \frac{l_{BM}}{l_{CB}} = \frac{b^*m}{cb}.$$

Отсюда отрезок $b^*m = cb \times \frac{l_{BM}}{l_{CB}}$, мм.

Отрезок cm плана ускорений определяется из пропорции:

$$\frac{a_{MC}}{a_{CB}} = \frac{l_{MC}}{l_{CB}} = \frac{mc}{cb}.$$

Отсюда отрезок $mc = cb \times \frac{l_{MC}}{l_{CB}}$, мм.

Из точки b* плана ускорений с учетом направления обхода букв на плане и на механизме делается засечка радиусом b*m, а из точки c плана ускорений делается засечка радиусом mc. На пересечении проведенных дуг ставится точка m. Соединив ее с полюсом плана ускорений $p_a$ , получим отрезок $p_am$ , который в масштабе $\mu_a$ представляет собой линейную скорость точки М. Для определения численного значения скорости точки М , используем понятие масштаба:

$$V_m = \frac{p_a m}{\mu_a}, \text{ м / с.}$$

Для определения углового ускорения звена 2 необходимо сначала определить тангенциальное ускорение $a^{\tau}_{CB} = \frac{Za^{\tau}_{CB}}{\mu_a}$, м / с$^2$, где $Za^{\tau}_{cb}$ - отрезок в мм, снимаемый с плана ускорений, изображающий $a^{\tau}_{cb}$.

Угловое ускорение звена 2 равно $\varepsilon_2 = \frac{a^{\tau}_{CB}}{l_{CB}}$, рад / с$^2$ . Направление его определяют путем мысленного поворота вектора $a^{\tau}_{CB}$, поставленного в точку С вокруг точки В механизма. ( На плане ускорений вектор тангенциального ускорения $a^{\tau}_{CB}$ направлен вверх и, следовательно поворот его вокруг точки В, если его мысленно поставить в точку С, осуществляется против часовой стрелки).

Рассмотрим другой пример решения задачи кинематики графоаналитическим методом на примере кулисного механизма рис. 5

**ДАНО:** все линейные размеры звеньев: $l_{AB}$ , $l_{CD}$ , $l_{DK}$ , $\omega_1$ , $\varepsilon_1$

**ОПРЕДЕЛИТЬ:** $V_B$ , $V_C$ , $V_K$ , $\omega_3$ , $a_B$ , $a_C$ , $a_K$ , $\varepsilon_3$

Рассмотрим, как движутся звенья, которые непосредственно взаимодействуют со стойкой с помощью кинематических пар. Звено 1 вращается вокруг оси A с угловой скоростью $\omega_1$ и точка B имеет траекторию в виде окружности радиуса $l_{AB}$ .

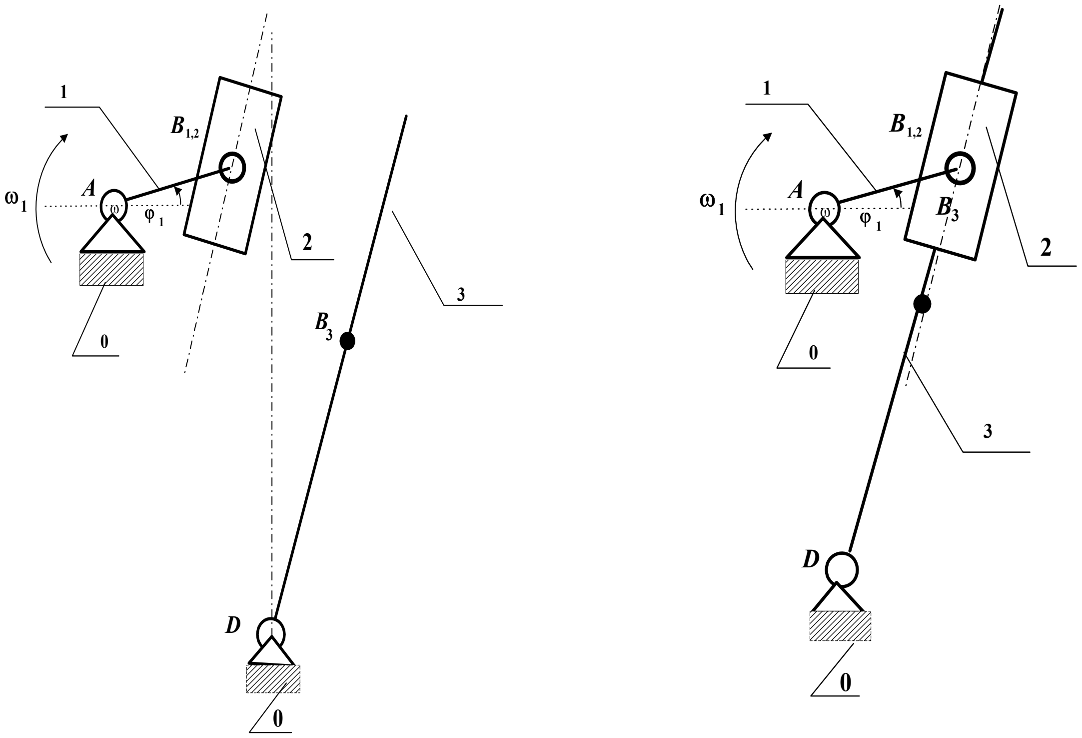


Рис. 5. Кривошипно-кулисный механизм.

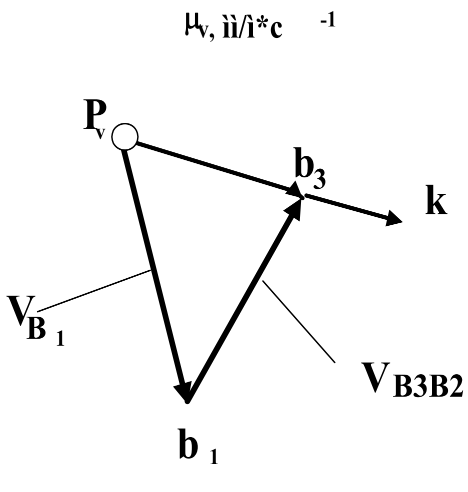


Рис. 6. План скоростей кривошипно-кулисного механизма.

Численное значение линейной скорости точки B определяется по формуле:

$$V_{B1,2} = \omega_1 \times l_{AB}\ , \text{м / с}.$$

Направлена скорость точки B касательно к траектории ( перпендикулярно к радиусу вращения AB ) по угловой скорости звена 1.

Конструктивно звено 1 соединяется со звеном 2 вращательной кинематической парой B ( то есть точка B одновременно принадлежит как звену 1 , так и звену 2). Звено 2 ( втулка) и звено 3 представляют собой кулисную пару. Это означает, что втулка 2 совершает сложное движение: она вместе со звеном 1 поворачивается вокруг оси A на $360^0$ и в то же время скользит вдоль звена 3 , которое является для втулки кулисой и в свою очередь совершает вращательное движение вокруг оси D в пределах некоторого угла. При этом кулиса имеет крайние положения: правое и левое. **Таким образом, угловая скорость звена 2 такая же как и звена 1 ( точка B у этих звеньев общая), а угловая скорость звена 3 пока нам неизвестна ,так как пока неизвестна линейная скорость какой-либо точки звена 3.**

Для того, чтобы аналитически связать кинематику звена 2 и звена 3 **на звене 3 ( кулисе) выбирают точку ( в данном случае она обозначена $B_3$ ), которая в данный момент времени расположена под точкой $B_{1,2}$** ( то есть точки $B_{1,2}$ и $B_3$ в рассматриваемый момент времени совпадают). **Эта рекомендация при рассмотрении кулисной пары является обязательной.** Тогда можно записать уравнение плоско – параллельного движения, связывающего движение кулисной втулки 2 и кулисы 3 :

$$\mathbf{V_{B3} = V_{B1,2} + V_{B3B1,2}} \quad (**)$$

Данное уравнение содержит две неизвестные величины: численное значение скорости точки $B_3$ и численное значение относительной скорости $V_{CB}$ . Однако, известно направление скорости$V_{B3}$ ( перпендикулярно радиусу вращения точки $B_3$ – перпендикуляр к $B_3D$ ) и скорости $V_{B3B1,2}$ ( **эта относительная скорость <u>всегда</u> направлена вдоль кулисы** так как втулка кулисы 2 движется по кулисе 3).

**Только определив скорость точки $B_3$ кулисы, можно переходить к определению скорости точки K кулисы.** Скорость точки K определяется из пропорции:

$$\frac{V_{KD}}{V_{B3D}} = \frac{l_{KD}}{l_{B3D}} = \frac{p_V K}{p_V b_3}$$ , откуда определяется отрезок $P_vK$ на плане скоростей.

$$P_V K = P_V\, b_3 \times \frac{l_{KD}}{l_{B3D}}\ , \text{мм}.$$

Угловая скорость звена 3 определяется по формуле :

$$\omega_3 = \frac{V_{KD}}{l_{KD}}\ , \text{рад / с}.$$

Круговая стрелка направления этой угловой скорости изображается в ту же сторону, куда направлен вектор скорости $V_{KD}$ на плане скоростей.

План скоростей ( рис 6 ) строится по уравнению (**) в соответствии с методикой,изложенной в первом примере.

Полное ускорение точки $B_{1,2}$ определяется по формуле:

$$\mathbf{a}_{B1,2} = \mathbf{a}_{B1,2}^{n} + \mathbf{a}_{B1,B2}^{\tau},$$

где численное значение нормального ускорения определяется как $a_{B1,2}^{n} = \omega_1^{2} \times l_{AB}$, а направлено оно по звену 1 от точки $B_{1,2}$ к точке А (т.е по радиусу $AB_{1,2}$ к центру вращаения А).

Подсчитав численные значения составляющих величин полного ускорения точки $B_{1,2}$, можно определить масштаб построения плана ускорений. Для этого нужно задаться отрезком произвольной длины $Za_{B1,2}^{n}$ который изображает на плане ускорений нормальное ( или тангенциальное) ускорение точки $B_{1,2}$. Тогда масштаб плана ускорений $\mu_a = Za_{B1,22}^{n} / a_{B1,2}^{n}$, мм / м*с$^{-2}$. Зная масштаб построения плана ускорений, можно определить длину отрезка $Za_{B1,2}^{\tau}$, который изображает на плане тангенциальное ускорение точки $B_{1,2}$

$$Za_{B1,2}^{\tau} = \mu_a | a_{B1,2}^{\tau} |, \text{ мм.}$$

Ускорение точки $B_3$, расположенной на кулисе ( звено 3) , определяют по уравнению плоско - параллельного движения:

$$\mathbf{a}_{B3}^{n} + \mathbf{a}_{B3}^{\tau} = \mathbf{a}_{B1,2} + \mathbf{a}_{B3\,B2}^{K} + \mathbf{a}_{B3\,B2}^{\tau}$$

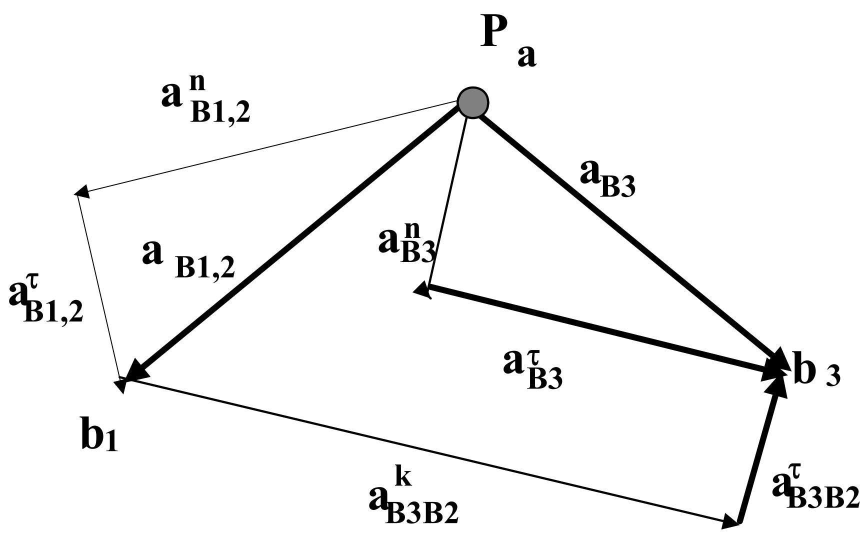


Рис. 7. План ускорений кривошипно-кулисного механизма (искомые ускорения выделены).

Численное значение кориолисова ускорения определяется по формуле**:**

$$\mathbf{a}^{\kappa}{}_{B3B2} = 2\,(\omega_3 \times \mathbf{V}_{B3B2}),$$

а его направление по известному из теоретической механике правилу: повернуть вектор относительной скорости $\mathbf{V}_{B3B2}$ на $90^0$ по направлению угловой скорости кулисы $\omega_3$.Таким образом и численное значение кориолисова ускорения и его направление полностью определены и поэтому этот вектор в формуле подчеркнут двумя черточками.

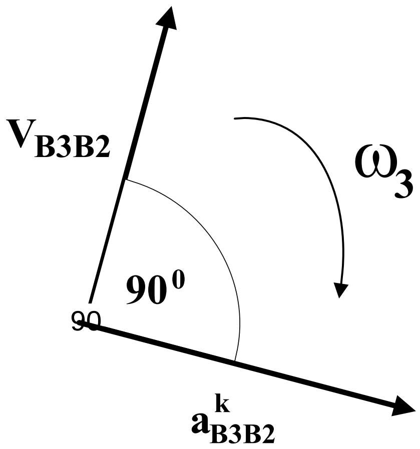


Рис.7. Правило Жуковского.

Тангенциальное ускорение $\mathbf{a}^{\tau}{}_{B3B2}$ известно лишь по направлению, которое проводят на плане ускорений перпендикулярно кориолисову ускорению. Это обусловлено тем, что $\mathbf{a}^{\tau}{}_{B3B2}$ направлено по относительной скорости $\mathbf{V}_{B3B2}$ то есть вдоль кулисы 3 параллельно отрезку $B_3C$ механизма рис. 5. Для замыкания плана ускорений из полюса $\mathbf{p_a}$ проводят луч параллельно положению отрезка $B_3C$ на схеме механизма рис. 5 от точки $B_3$ к точке С -центру вращения кулисы 3 отрезок $Z_{a}{}^{n}{}_{B3} = \mu_a \times \mathbf{a}^{n}{}_{B3}$ , мм, изображающий на плане ускорений нормальное ускорение токи $B_3$. Через конец проведенного отрезка перпендикулярно ему проводится луч до пересечения с лучом, изображающим направление $\mathbf{a}^{\tau}{}_{B3B2}$. Точка пересечения указанных лучей обозначается буквой $b_3$ .

Для определения направления полного ускорения точки $B_3$ механизма точка $b_3$ плана ускорений соединяется с полюсом $p_a$ плана. Чтобы получить численное значение полного ускорения $a_{B3}$ , необходимо линейкой замерить величину отрезка $p_ab_3$ на плане ускорений и разделить ее на значение масштаба плана, то есть $a_{B3} = \dfrac{pab_3}{\mu_a}$ , мм / м.

Для определения полного ускорения точки К составляют пропорцию:

$$\frac{a_{KC}}{a_{B3C}} = \frac{L_{KC}}{L_{B3C}} = \frac{kc}{b3c} \Rightarrow kc = b3c \times \frac{L_{KC}}{L_{B3C}}$$

, мм. На плане ускорений от полюса $p_a$ ( с этой точкой совпадает на плане неподвижная точка с ) по лучу $p_ab_3$ откладывают длину отрезка kc, полученную выше. Соединив полюс $p_a$ с точкой k , получим направление вектора абсолютного ускорения точки К механизма.

## Двойные кулисные втулки.

Часто в задачах на кинематический анализ рычажных механизмов встречаются механизмы с двойными кулисными втулками рис. 6. Каждая из этих втулок представляет собой отдельное звено, соединенное вращательной кинематической парой друг с другом. На рис. 6 вращательная кинематическая пара обозначена $G_{4,5.}$ Цифры 4,5 означают, что G связывает два звена 4 и 5, каждое из которых может поворачиваться относительно друг друга.

Для рассматриваемого фрагмента кинематической схемы механизма звено 4 движется вдоль звена 3, которое является кулисой. В то же время звено 5, являющееся выходным звеном, движется вдоль стойки 6.

Прежде, чем перейти к определению линейной скорости или линейного ускорения точки $G_{4,5}$ , на кулисе- звене 3 выбирают точку $G_3$ , которая в рассматриваемый момент времени совпадает с точкой $G_{4,\,5}$.

Линейная скорость точки $G_3$ должна быть определена до того, как записывется уравнение плоско - параллельного движения для движения двойной втулки :

$$\mathbf{V}_{G4,5} = \mathbf{V}_{G3} + \mathbf{V}_{G4,5G3}$$

Линейное ускорение точки $G_{4,5}$ определяется по уравнению:

$$\mathbf{a}^{n}_{G4,5} + \mathbf{a}^{\tau}_{G4,5} = \mathbf{a}_{G3} + \mathbf{a}^{k}_{G4,5G3} + \mathbf{a}^{\tau}_{G4,5G3.}$$

Нормальное ускорение $\mathbf{a}^{n}_{G4,5G3}$ равно нулю так как звено 4 движется поступательно вдоль звена 3. Кориолисово ускорение численно определяют по формуле : $\mathbf{a}^{k}_{G4,5G3} = 2\,(\omega_3 \times \mathbf{V}_{G4,5G3})$.

Для определения направления этого ускорения вектор относительной скорости $V_{G4,5G3}$ поворачивают на $90^0$ в направлении угловой скорости звена 3 - кулисы.

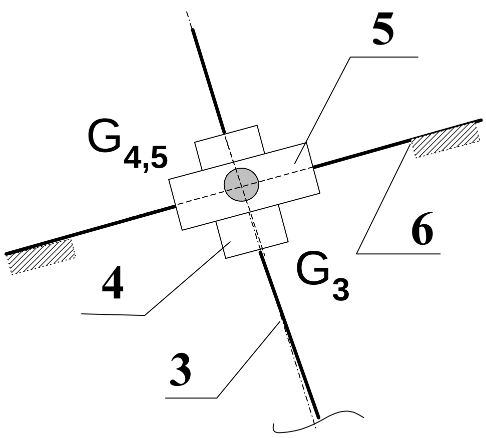


Рис.8. Двойная кулисная втулка.